

## МЕТОД РАСЧЕТА ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД НА ОДНООСНОЕ СЖАТИЕ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ КОНТАКТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Розглядається метод розрахунку межі міцності гірських порід на одноосьове стискання при лінійному зв'язку між дотичними напруженнями від зовнішнього тертя і нормальними напруженнями. Метод базується на теорії граничного стану гірської породи у локальних областях.

## METHOD OF CALCULATION OF STRENGTH LIMIT OF ROCK UNDER SINGLE-LINE RELATIONSHIPS BETWEEN CONTACT STRENGTHS

Considered method of calculation of strength limit of samples of rock on one-axis compression under single-line relationships between tangent strengths from external friction and normal strengths. Method is based on theories of limiting condition of rock in local areas.

Одним их основных параметров оценки напряженно-деформированного состояния горных массивов и разрушения их исполнительными органами горных машин является предел прочности образцов при одноосном сжатии. Для определения предела прочности используется сложное оборудование, требующее высокой квалификации обслуживающего персонала, что под силу только научно-исследовательским организациям. Поэтому имеется потребность в разработке метода расчета предела прочности горных пород при наличии некоторых их механических характеристик, получаемых с использованием простых приборов, доступных для эксплуатации непосредственно на предприятиях, где, в первую очередь, необходима информация о прочности пород. Решение задачи разработки метода расчета проводится в соответствии с заданием госбюджетной темы 1.3.5.74 «Механика горных пород, техника и технологии добычи угля высоконагруженными лавами». В основе метода предлагается использовать критерий прочности Кулона с дополнительным введением в него коэффициента внешнего трения в локальной области образца. В работе [1] проведено исследование изменения прочности горных пород на основании этого критерия от коэффициентов внутреннего и внешнего трения. Автор исходил из теории пластичности, в которой принимается постоянство максимальных эффективных касательных напряжений, равных сопротивляемости материала сдвигу  $k$  по всей линии скольжения, хотя им введен дополнительный угол поворота линии скольжения от внешнего трения из предположения, что на выходе линии скольжения на плоскость её возврата имеется упругая область. Несмотря на проведение этого совершенствования критерия Кулона, достичь высокой достоверности расчетного подхода с экспериментальными данными не удалось. В данной статье будем исходить из теории предельного состояния материала в локальной области [2], в которой эффективные касательные напряжения достигают значения сопротивляемости сдвигу  $k$ , а в остальных областях, в которых эффективные касательные напряжения не достигают значения  $k$ , материал деформируется упруго. Собственно на основании теории предельного состояния

и построены, в основном (за исключением теории пластичности), многочисленные критерии прочности (количество которых превышает число сорок), проблема которых сводится к отысканию функции внутренних напряжений, которая позволяет определить некоторый фактор, имеющий механическую природу и могущий быть оцененным количественно. Будем исходить из значения максимального эффективного касательного напряжения, ответственного за разрушение или возникновение текучести при условии равенства его максимальной величины сопротивляемости материала сдвигу в какой-либо точке материала. Для достижения этой цели при расчете предела прочности образца горных пород при одноосном сжатии должны быть построены траектории максимальных эффективных касательных напряжений и определены в каждой её точке нормальные и касательные напряжения. Для упрощения решения центр осей координат разместим в верхних левом или правом углах образца, учитывая симметричность деформирования левой и правой части образца. Схематично представим сетку траекторий максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН)  $\tau$ , в образце (рис.1) при наличии внутреннего и внешнего трения, при этом принимаем, что касательные напряжения от внешнего трения уменьшаются к центру образца по линейному закону

$$\tau_{xy} = \tau_k \left( 1 - \frac{2y}{h} \right), \quad (1)$$

где  $\tau_k$  – касательное напряжение от внешнего трения.

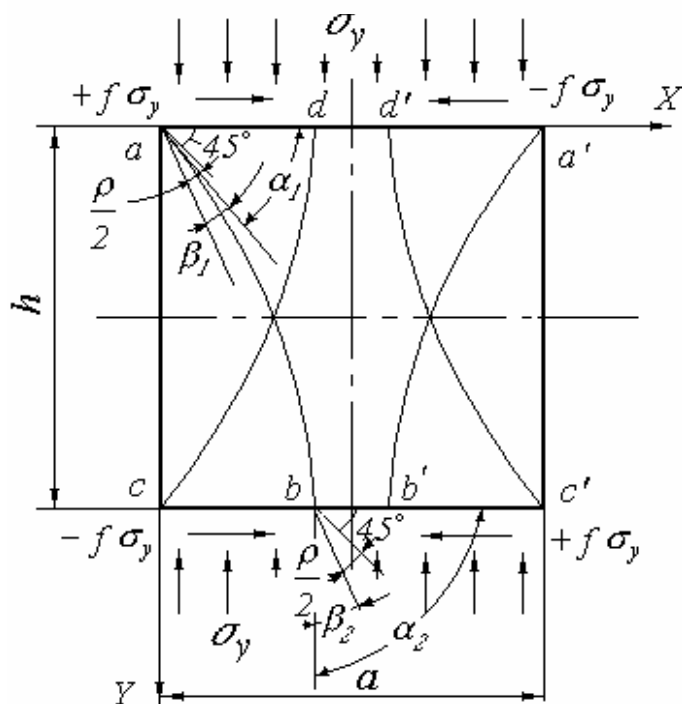


Рис.1. Схема сетки линий скольжения в образце горной породы при наличии внутреннего и внешнего трения

Из этого следует, что на горизонтальной оси симметрии образца напряжения  $\tau_{xy} = 0$  и любая ГМЭКН должна пересекать эту осевую ось по Кулону под углом  $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right)$ , где  $\rho$  – угол внутреннего трения.

Для определения нормальных и касательных напряжений на контактной поверхности используем известные дифференциальные напряжения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Принимаем из известных положений сопротивления материалов, что напряжение  $\sigma_y$  сохраняется постоянным по высоте образца. Вследствие этого используем первое дифференциальное уравнение. Так как касательное напряжение  $\tau_k$  на контактной поверхности обусловлено трением плиты о породу, на основании закона Амонтона имеем

$$\tau_k = f\sigma_y \quad (3)$$

Здесь используем важное равенство [3]

$$d\sigma_x = d\sigma_y \quad (4)$$

Подставив выражения (1) и (3) в первое уравнение системы (2), получаем

$$\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{f\sigma_y}{h} \quad (5)$$

Из решения уравнения (5) имеем

$$\sigma_y = \sigma_{y0} e^{\frac{2f \cdot x}{h}}, \quad (6)$$

где  $\sigma_{y0}$  – нормальные напряжения в угловых точках образца.

Тогда 
$$\tau_k = f\sigma_y = f\sigma_{y0} e^{\frac{2f \cdot x}{h}} \quad (7)$$

Эпюры напряжений показаны на рис.2.

По формулам (6) и (7) можно определить напряжения в любой точке кон-

тактной поверхности. После интегрирования выражения (6) определяем полное давление на единицу длины образца

$$P = 2 \int_0^{a/2} \sigma_y dx = \sigma_{y0} \frac{h}{f} \left( e^{\frac{fa}{h}} - 1 \right). \quad (8)$$

Тогда удельное усилие (давление) равно

$$p = \frac{P}{a} = \sigma_{y0} \frac{h}{f \cdot a} \left( e^{\frac{fa}{h}} - 1 \right). \quad (9)$$

Теперь предстоит рассмотреть центральный вопрос – определить нормальное напряжение  $\sigma_y$  в угловой точке.

Нормальное напряжение  $\sigma_y$  определяем из решения дифференциального уравнения

$$d\sigma_\alpha = 2(k + \mu\sigma_\alpha) d\alpha_{ab}, \quad (10)$$

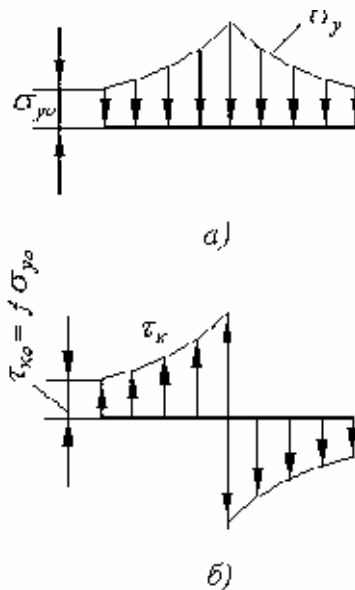


Рис. 2. Эпюры контактных нормальных  $\sigma_y$  и касательных напряжений  $\tau_k$  на контактной плоскости

где  $\sigma_\alpha$  – нормальное напряжение на ТМЭКН;  $\alpha_{ab}$  – угол поворота ТМЭКН.

Решение дифференциального уравнения (10) даёт

$$\frac{\tau_\alpha + \mu\sigma_{\alpha 2}}{k + \mu\sigma_{\alpha 1}} \Big|_{\sigma_{\alpha 1}}^{\sigma_{\alpha 2}} = e^{2\mu\alpha_{ba}}, \quad (11)$$

где  $\sigma_{\alpha 1}$  – нормальное напряжение на ТМЭКН в точке разрушения;  $\sigma_{\alpha 2}$  – нормальное напряжение на ТМЭКН в точке её выхода из образца или в точке пере-

сечения ТМЭКН с продольной линией симметрии образца;  $\alpha_{ba}$  – угол поворота ТМЭКН от внешнего трения.

Для определения этих нормальных напряжений следует рассмотреть равновесие сил на ТМЭКН.

Как известно, в материале образуется два семейства линий скольжения  $\xi$  и  $\eta$ . В работе [1] дается обоснование образованию первоначальной трещины в угловых точках образца из-за отсутствия нормальных и касательных напряжений на свободных от нагрузок боковых поверхностях. По этой причине и в силу симметрии линий скольжения подвергнем исследованию одну траекторию максимальных эффективных касательных напряжений, выходящую из верхнего левого угла (рис.1). Рассмотрим равновесие двух треугольников на линии скольжения, гипотенузы которых совпадают с ТМЭКН, а катеты являются частью контактных поверхностей, на которых приложены касательные напряжения от внешнего трения.

Для составления уравнений равновесия сил, приложенных к сторонам треугольников, используем критерий Кулона

$$\tau_s = \tau_\alpha + \mu\sigma_\alpha, \quad (12)$$

где  $\tau_\alpha$  – активное касательное напряжение на гипотенузе треугольника.

Из преобразования применительно к нашей задаче известных выражений имеем

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha \pm f\sigma_y \cos 2\alpha; \quad (13)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha \mp f\sigma_y \sin 2\alpha; \quad (14)$$

где  $\sigma_x$  – поперечное нормальное напряжение на ТМЭКН.

Верхние знаки в формулах относятся к верхней половине образца, нижние – к нижней половине. Тогда на основании выражения (12)

$$\tau_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha \pm f\sigma_y \cos 2\alpha + \mu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha \mp f\sigma_y \sin 2\alpha \right). \quad (15)$$

Для определения выражения для расчета экстремальных углов наклона ТМЭКН, продифференцируем уравнение (15), после чего получим

$$\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \mp 2\mu f\sigma_y}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) \pm f\sigma_y}. \quad (16)$$

Из этого выражения получено

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2f\sigma_y}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (17)$$

Тогда угол наклона ТМЭКН можно представить в ином виде

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\rho}{2} + \beta, \quad (18)$$

где  $\beta$  – угол поворота ТМЭКН от действия внешнего (контактного) трения. Из преобразования выражения (15) получено

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \cdot \operatorname{Cos} \rho}{\operatorname{Sin} \rho - \sqrt{1 - b^2}}, \quad (19)$$

где

$$b = \pm \frac{f\sigma_y}{\tau_s + \mu\sigma_y}. \quad (20)$$

Угол  $\beta$  принимает положительное или отрицательное значение в зависимости от направления действия внешнего трения в соответствии с формулой (20). Знак при параметре  $b$  принимается по известным правилам выбора знаков касательных напряжений: для левого верхнего угла образца принимается знак плюс, для нижнего – знак минус.

Определяя значения  $\operatorname{Sin} 2\alpha$  и  $\operatorname{Cos} 2\alpha$  из выражения (16) и подставляя их в равенство (15) получим уравнение равновесия треугольного элемента на ТМЭКН

$$\tau_s = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \mu^2)(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4f^2\sigma_y^2} - \frac{\mu(\sigma_x - \sigma_y)}{2}. \quad (21)$$

Надо сказать, что уравнение (21) является общим для верхней и нижней половины образца. В случае равенства  $\tau_s = k$  уравнение (21) является предельным уравнением равновесия. В этом случае происходит в локальной области (точке) образование трещины.

Из уравнения (21) получено выражение для определения поперечного нормального напряжения

$$\sigma_x = \frac{2(\tau_s + \mu\sigma_y)}{\operatorname{Cos} \rho} (\operatorname{Sin} \rho - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y. \quad (22)$$

Следует подчеркнуть, что формула (22) обеспечивает получение всего спектра значений поперечных напряжений: от растягивающих ( $\sigma_x < 0$ ) до сжимаю-

щих, меньших продольных сжимающих напряжений ( $0 < \sigma_x < \sigma_y$ ), гидростатических ( $\sigma_x = \sigma_y$ ) и сжимающих, превышающих продольные сжимающие напряжения. Проведен анализ поперечных напряжений при отсутствии внешнего трения, т.е. при  $b = 0$ .

Тогда формула (22) имеет вид

$$\sigma_x = \frac{2(\tau_0 + \mu\sigma_y)}{\text{Cos}\rho} (\text{Sin}\rho - 1) + \sigma_y. \quad (23)$$

Напряжение  $\sigma_y$  для пород при отсутствии внешнего трения определяется по формуле [4]

$$\sigma_y = \frac{2\tau_0 \text{Cos}\rho}{1 - \text{Sin}\rho}. \quad (24)$$

После подстановки выражения (24) в уравнение (23) получаем, что  $\sigma_x = 0$ . Из этого сделан вывод, что поперечные напряжения формирует внешнее трение. При отсутствии внешнего трения поперечные нормальные напряжения возникнуть не могут. При наличии выражения для  $\sigma_x$  представляется возможным определить нормальные напряжения и углы согласно формулам (13)-(17).

Выражения полусуммы и полуразности нормальных напряжений, необходимые для этих уравнений, имеют вид

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(\tau_0 + \mu\sigma_y)}{\text{Cos}\rho} (\text{Sin}\rho - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y. \quad (25)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{(\tau_0 + \mu\sigma_y)}{\text{Cos}\rho} (\text{Sin}\rho - \sqrt{1 - b^2}). \quad (26)$$

Используя выражения (9), (10), (19), (25) и (26) и опуская довольно громоздкие преобразования, получим систему уравнений для расчета предела прочности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yo} &= \frac{1}{\mu} \left[ \frac{k(1 + \text{Sin}\rho\sqrt{1 - b_1^2})e^{2\mu(\beta_1 + \beta_2)}}{1 - \text{Sin}\rho\sqrt{1 - b_2^2}} - \tau_0 \right] \\ \tau_0 &= \frac{k(1 - \text{Sin}\rho\sqrt{1 - b_1^2}) + \mu\sigma_y(1 - \text{Sin}\rho\sqrt{1 - b_1^2})}{(1 + \text{Sin}\rho\sqrt{1 - b_2^2})e^{(\beta_2 - \beta_1)}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{f\sigma_y \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \Psi_1(f, x, y)}{k + \mu\sigma_y \cdot \Psi_1(f, x, y)}, \quad b_2 = \frac{f\sigma_y \cdot \Psi_2(f, x, y)}{\tau_s + \mu\sigma_y \cdot \Psi_2(f, x, y)}$$

$\beta_1$  и  $\beta_2$  – углы поворота ТМЭКН соответственно в левом верхнем углу образца и в точках выхода ТМЭКН на нижнюю опорную поверхность или продольную ось симметрии образца.

$\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – специальные функции, которые определяются условиями формирования ТМЭКН.

После подстановки системы уравнений (27) в выражения (6), (7) и (9) сравнительно легко могут быть получены уравнения расчета численных значений контактных нормальных и касательных напряжений. Более трудной задачей является задача определения углов поворота ТМЭКН  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , значение которых неоднозначно и определяется специальными функциями  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ . Это будет продемонстрировано в последующих публикациях, в которых будет дана оценка достоверности расчетного метода с многочисленными экспериментальными данными. Будет раскрыта природа разрушения образцов горных пород, включая парадоксальный вид разрушения вдоль действия сжимающей нагрузки и масштабный эффект разрушения.

Разработанный метод расчета основан на теории предельного состояния материала с учётом контактного трения и линейной связи между контактными нормальными и касательными напряжениями. В этом его новизна и особенность. При отсутствии внешнего трения метод сводится к известным методам [5, 6].

#### Выводы.

1. Разработан новый подход к определению предела прочности образцов горных пород с учетом внутреннего трения и линейной связи между контактными нормальными и касательными напряжениями от внешнего трения.

2. В перспективе при дальнейших исследованиях будет раскрыта природа различных известных форм разрушения образцов горных пород, включая парадоксальный вид разрушения вдоль действия сжимающей нагрузки и масштабный эффект разрушения.

3. Применение метода при практических расчетах позволит повысить достоверность расчетных результатов с экспериментальными данными, по сравнению с ранее разработанными методами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Д.Л. Определение влияния внутреннего и внешнего трения горных пород на их прочность при одноосном сжатии. Дисс.канд.техн.наук. – Днепропетровск, 2002.–145 с.
2. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том 1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.
3. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. – М.: Машиностроение, 1977.– 423 с.
4. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение.– М.: Мир, 1975, т 2. – С. 336-520.
5. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – М.: Стройиздат, 1960. –243 с.
6. Ревутенко А.Ф. Механика упруго-пластичных сред и нестандартный анализ. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2000. –426 с.